Análisis Funcional Examen V

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Funcional
Examen V

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2021/22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Descripción Examen Ordinario.

Ejercicio 1 (1.5 puntos)**.** Sea X el espacio normado de las funciones continuas en $[0,1]$ que se anulan en cero con la norma del máximo:

$$X = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}, \qquad \|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

En X se considera el funcional lineal $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\varphi(f) = \int_0^1 tf(t)\ dt \qquad \forall f \in X$$

a) [**1 punto**] Calcula $\|\varphi\|$.

b) [**0.5 puntos**] Prueba que φ no alcanza su norma.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sea $T : c_0 \to l_2$ el operador lineal definido para todo $x \in c_0$ por

$$[Tx](n) = \frac{x(n)}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) [**1 punto**] Calcula su norma y prueba que T no la alcanza.

b) [**0.5 punos**] Prueba que $Y = T(c_0)$ es un subespacio denso en l_2 y que T es una biyección lineal de c_0 sobre Y.

c) [**0.5 puntos**] ¿Es continua la aplicación $T^{-1} : Y \to c_0$? ¿Es Y cerrado en l_2?

Ejercicio 3 (1.5 puntos)**.** Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(X,Y)$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathcal{F}$ está acotado.

b) Para cada $x \in X$ y cada $g \in Y^*$ el conjunto $\{g(T(x)) : T \in \mathcal{F}\}$ está acotado.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Responde a las sigueintes cuestiones indicando en cada caso, según proceda, un resultado de teoría que justifique tu respuesta o un contraejemplo, o bien dando una prueba.

a) [**0.5 puntos**] ¿Puede definirse alguna norma completa en el espacio vectorial c_0 de las sucesiones casi nulas?

b) [**0.5 puntos**] Si H es un espacio de Hilbert y M es un subespacio de H verificando que $M^\perp = \{0\}$, entonces $M = H$.

c) [**0.5 puntos**] Sea $\{f_n\}$ una sucesión puntualmente acotada de funciones lineales continuos en un espacio de Banach X, definiendo $T(x) = \{f_n(x)\}$ se obtiene un operador lineal continuo de X en t_∞.

d) [**0.5 puntos**] Sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas completas no equivalentes en un espacio vectorial X. ENtonces la aplicación identidad $I_X : (X, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$ no es continua.

Ejercicio 5 (3 puntos)**.** Escribe sobre alguno de los siguientes temas:

a) Ortogonalidad. Teorema de la proyección ortogonal. Teorema de Riesz-Fréchet.

b) Separación de conjuntos convexos en espacios normados.

c) Lema de categoría de Baire. Teorema de Banach-Steinhaus.